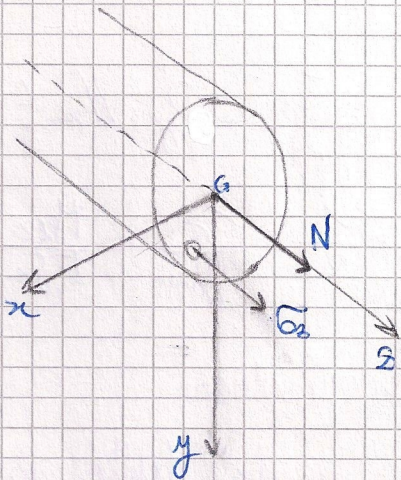


Sforzo normale o assiale: analisi a rottura

Lesione di trave soggetta a forze assiale N :



$$\epsilon_z = \frac{l - l_0}{l_0} \quad \sigma_z = \frac{N}{A}$$

Limite elastico (almeno una fibra della sezione raggiunge lo snervamento):
 $N_e = A \cdot f_y$

Nel caso di sforzo assiale tutte le fibre raggiungono contemporaneamente lo snervamento.

Quindi lo sforzo limite plastico (tutte le fibre della sezione raggiungono lo snervamento) coincide con quello elastico:

$$N_p = N_e = A \cdot f_y$$

Oltre il limite elastico l'elemento si allunga fino ad un valore ultimo $\Delta l_u = l_0 \cdot \epsilon_u$, con ϵ_u valore ultimo della deformazione. Nel caso di possibilità di incrudimento il valore dello sforzo ultimo è maggiore di quello del limite plastico: $N_u > N_p$.

Esempio HEB 280:

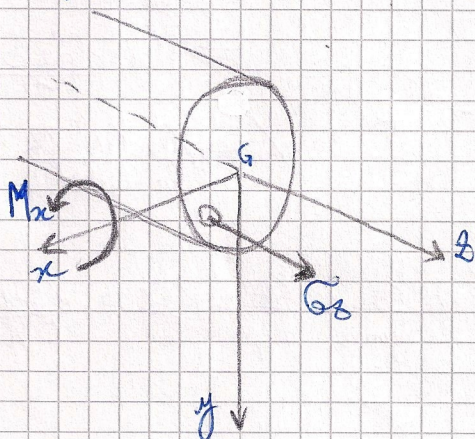
$$A = 131 \text{ cm}^2 \quad f_y = 355 \text{ N/mm}^2$$

Il valore dello sforzo ultimo è:

$$N_p = N_e = f_y \cdot A = 4651 \text{ kN}$$

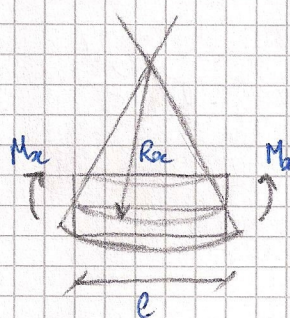
Flessione retta: analisi a rottura

Supponiamo momento flettente M_x :



$$\sigma_z = \frac{M_x \cdot y}{J_x} \quad \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{M_x \cdot y}{E \cdot J_x} = \chi_x \cdot y$$

χ_x è la curvatura:

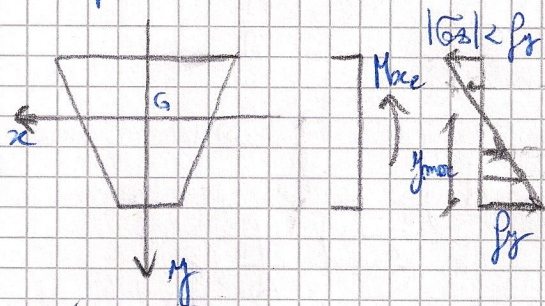


$$\chi_x = \frac{1}{R_x} = \frac{M_x}{E \cdot J_x} = \frac{\epsilon_z}{y}$$

$$\Rightarrow \sigma_z = \frac{M_x \cdot y}{J_x} = E \cdot \chi_x \cdot y$$

$$\Rightarrow M_x = \frac{\sigma_z \cdot J_x}{y} = E \cdot J_x \cdot \chi_x$$

Il limite elastico si ha quando almeno una fibra della sezione raggiunge lo snervamento. Nel caso di flessione retta è quella più distante dall'asse neutro!

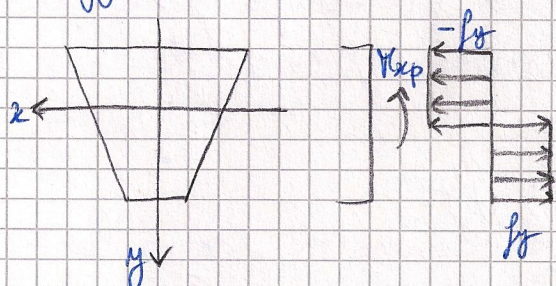


$$M_{ae} = \frac{f_y J_x}{y_{max}} = f_y \cdot W_x = E J_x \cdot \chi_{ae}$$

$$\chi_{ae} = \frac{1}{R_x} = \frac{E_y}{y_{max}} = \frac{M_{ae}}{E J_x}$$

Con $W_x = \frac{J_x}{y_{max}}$ modulo di resistenza elastica.

Il limite plastico viene raggiunto quando tutte le fibre sono soggette alla tensione di snervamento!



$$M_{ap} = f_y Z_x$$

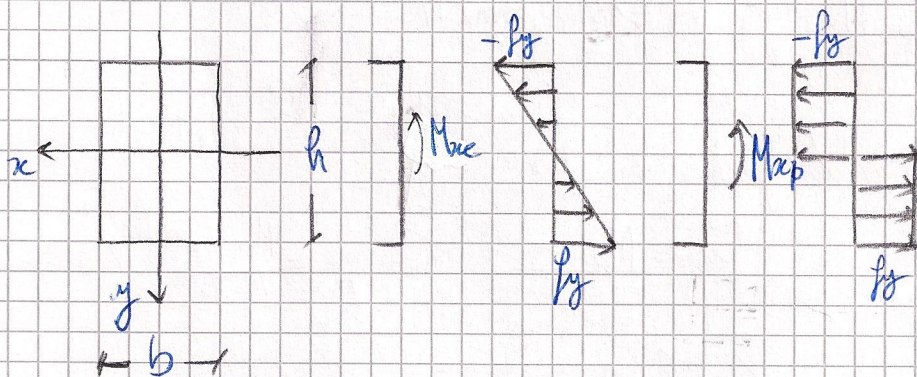
Con Z_x modulo di resistenza plastico. Notiamo che raggiungendo lo stato limite plastico, l'asse neutro si sposta.

Con Z_x modulo di resistenza plastico. Notiamo che raggiungendo lo stato limite plastico, l'asse neutro si sposta.

L'indice della possibilità di sfruttare un elemento in campo post-elastico è detto rendimento:

$$\eta = \frac{M_{ap}}{M_{ae}} = \frac{Z_x}{W_x}$$

Considerando come caso particolare la sezione rettangolare:



$$J_x = \frac{1}{12} b h^3$$

$$C_{ax} = \frac{M_{ax}}{J_x}$$

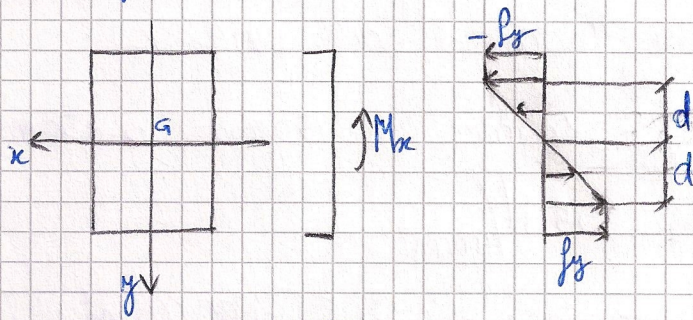
$$\Rightarrow M_{ae} = \frac{C_{ax} b h^3}{12 y}$$

$$\chi_{ae} = \frac{M_{ae}}{E J_x} = \frac{12 M_{ae}}{E b h^3} = \frac{E_y}{h/2}$$

Stato limite elastico:

$$M_{ae} = \frac{f_y J_x}{y_{max}} = \frac{f_y \frac{1}{12} b h^3}{h/2} = f_y \frac{b h^2}{6}, \quad \chi_{ae} = \frac{E_y}{y_{max}} = \frac{E_y}{h/2} = \frac{2 E_y}{h} = \frac{2 f_y}{b h}$$

Impostiamo l'equilibrio durante la plasticizzazione delle altre fibre:



Pieno piano sulla sezione in plasticizzazione

$$M_x = 2f_y b \left(\frac{h}{2} - d\right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + d\right) + 2f_y b \frac{d}{2} \cdot \frac{2}{3} d = f_y b \left(\frac{h^2}{4} - d^2 + \frac{2}{3} d^2\right)$$

$$= f_y b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{d^2}{3}\right)$$

$$X_x = \frac{E_s}{f_y} \Rightarrow X_x = \frac{E_s}{d}$$

Per:

- $d = \frac{h}{2} \Rightarrow M_x = M_{xe} = f_y b \frac{h^2}{6}, X_x = X_{xe} = \frac{2E_s}{h}$
- $d = 0 \Rightarrow M_x = M_{xp} = f_y b \frac{h^2}{4}, X_x = X_{xp} \rightarrow \infty$

Quindi:

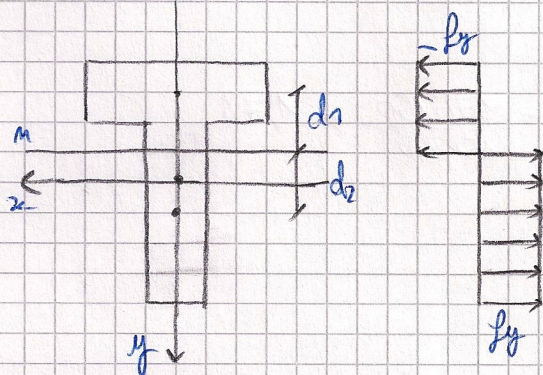
$$W_x = \frac{M_{xe}}{f_y} = \frac{b h^2}{6} \quad e \quad Z_x = \frac{M_{xp}}{f_y} = \frac{b h^2}{4}$$

Il rendimento η :

$$\eta = \frac{M_{xp}}{M_{xe}} = \frac{Z_x}{W_x} = \frac{\frac{b h^2}{4}}{\frac{b h^2}{6}} = \frac{3}{2}$$

Cio significa che oltre il campo elastico il momento può ancora aumentare di una quantità pari a metà del valore che caratterizzava lo stato limite elastico.

Per sezioni di forma qualsivoglia:



$$-A_1 f_y + A_2 f_y = 0$$

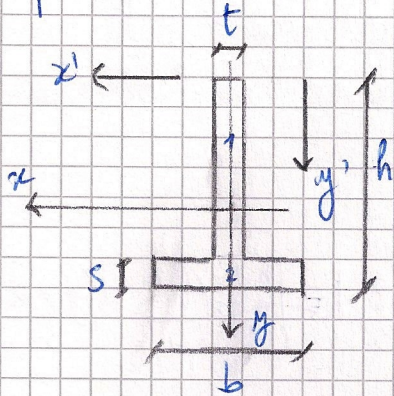
$$\Rightarrow A_1 = A_2 = \frac{A}{2}$$

$$eq: A_1 d_1 f_y + A_2 d_2 f_y = M_{xp}$$

$$\Rightarrow |S_1| f_y + |S_2| f_y = M_{xp}$$

Allora $Z_x = \frac{M_{xp}}{f_y} = |S_1| + |S_2|$. Se la sezione σ simmetrica
rispetto all'asse x i sagomari forniscono:
 $S_2' = |S_1| = |S_2|$

Se non c'è simmetria bisogna fare i conti, come si vedrà nell'esempio che segue. Abbiamo una sezione a T, che difetta quindi della simmetria rispetto all'asse x :



$$t = s = 10 \text{ mm} \quad h = 250 \text{ mm} \quad b = 150 \text{ mm}$$

$$f_y = 355 \text{ N/mm}^2$$

$$A_{tot} = b \cdot s + (h-s) \cdot t = 3900 \text{ mm}^2$$

$$x_G^1 = 75 \text{ mm} \text{ perché } y' \text{ è asse di simmetria}$$

$$S_x = b \cdot s \cdot \left(h - \frac{s}{2}\right) + (h-s) \cdot t \cdot \frac{(h-s)}{2} = 655500 \text{ mm}^3$$

$$\Rightarrow y_G^1 = \frac{S_x}{A_{tot}} = 168 \text{ mm}$$

$$J_x = \frac{1}{12} b \cdot s^3 + (y_G^2 - y_G^1)^2 b \cdot s + \frac{1}{12} t \cdot (h-s)^3 + (h-s) t (y_G^1 - y_G^2)^2$$

$$= \frac{1}{12} \cdot 150 \cdot 10^3 + (245 - 168)^2 \cdot 150 \cdot 10 + \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 240^3 + 240 \cdot 10 (168 - 120)^2 =$$

$$= 25955600 \text{ mm}^4$$

La fibra più sollecitata è a $y_{max} = 168 \text{ mm}$, quindi:

$$M_{xe} = \frac{J_x \cdot f_y}{y_{max}} = f_y \cdot W_x = 54,85 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Posizione dell'asse neutro nello stato limite plastico:

$$A_1 = A_2 = \frac{A}{2} \Rightarrow y_H \cdot t = \frac{A}{2} \Rightarrow y_H = \frac{A}{2t} = \frac{3900}{2 \cdot 10} = 195 \text{ mm}$$

Accettabile perché $y_H < h - s$. Stato limite plastico!

$$|S_1| = y_H \cdot t \cdot \frac{y_H}{2} = 130125 \text{ mm}^3$$

$$|S_2| = \left(h - s - \frac{y_H}{2}\right) \cdot \left(h - s - \frac{y_H}{2}\right) \cdot t + b \cdot s \cdot \left(h - y_H - \frac{s}{2}\right) = 85125 \text{ mm}^3$$

$$\Rightarrow Z_x = |S_1| + |S_2| = 275250 \text{ mm}^3$$

$$\Rightarrow M_{xp} = f_y \cdot Z_x = 97,71 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Il rendimento

$$\eta = \frac{M_{xp}}{M_{xe}} = \frac{Z_x}{W_x} = \frac{275250}{154498} = 1,78$$

Taglio puro: analisi e rottura

Consideriamo una sezione simmetrica rispetto all'asse y soggetta al taglio T_y . In campo elastico lineare e quindi al limite elastico si ha

$$\overline{\tau}_{xy}(y) = \frac{T_y S_z^*(y)}{J_x B(y)} \Rightarrow \overline{\tau}_{xy} = \sqrt{3} \frac{T_y S_z^*(y)}{J_x B(y)}$$

$$\Rightarrow |\tau_{xy}| = \tau_{ye} = \frac{T_y}{\sqrt{3}} f_y \quad \text{con } Y_y = \left| \frac{J_x B(y)}{S_z^*(y)} \right|_{\min}$$

Per le sezioni a doppio T si assume che lo sforzo di taglio sia assorbito interamente dall'anima, quindi:

$$\overline{\tau}_{xy \text{ anima}} = \frac{T_y}{A_{\text{anima}}} \Rightarrow \overline{\tau}_{xy, \text{anima}} = \sqrt{3} \frac{T_y}{A_{\text{anima}}}$$

Al limite elastico $|\tau_{xy}| = \tau_{ye} \cong \frac{A_{\text{anima}}}{\sqrt{3}} f_y$

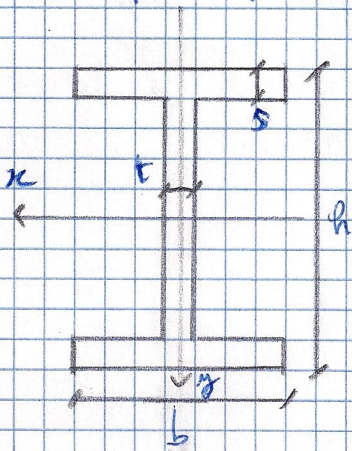
Quando al caso generale, $\sqrt{3}$ passando al limite plastico, si ha:

$$|\tau_{xy}| = \tau_{yp} = \frac{A}{\sqrt{3}} f_y$$

Tutte le fibre hanno raggiunto la plasticizzazione. Per tanto, con buona approssimazione (escludendo cioè che le piattabande si plasticizzano), per sezione a doppio T il taglio al limite plastico coincide con quello al limite elastico:

$$|\tau_{xy}| = \tau_{yp} \cong \tau_{ye} \cong \frac{A_{\text{anima}}}{\sqrt{3}} f_y$$

Ad esempio, proprio con sezione a doppio T, IPB 300:



$$h = 300 \text{ mm} \quad b = 150 \text{ mm}$$

$$t = 7,1 \text{ mm} \quad S = 10,7 \text{ mm}$$

$$A_{\text{anima}} = (h - 2s) \cdot t = 1978,06 \text{ mm}^2$$

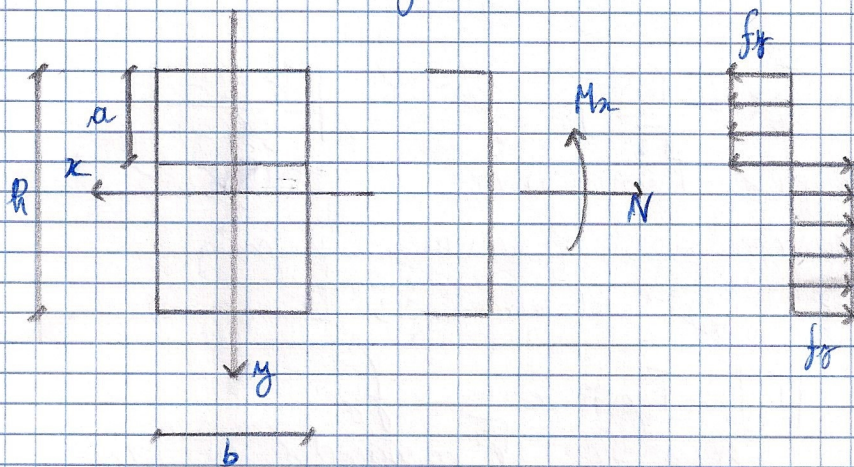
$$\Rightarrow \tau_{yp} = \tau_{ye} = \frac{A_{\text{anima}}}{\sqrt{3}} f_y = 405,4 \text{ MPa}$$

$$\text{avendo assunto } f_y = 355 \text{ MPa}$$

Imbrazione tra caratteristiche di sollecitazione

Se abbiamo sforzo assiale N al limite plastico si ha $N_p = A f_y$. Con solo sforzo flettente M_x al limite plastico si ha $M_{xp} = Z_x \cdot f_y$. Se abbiamo contemporaneamente N e M_x è necessario costruire un dominio limite pieno. Essi è il luogo geometrico delle coppie di

valori N e M_x che danno luogo allo sfruttamento massimo delle risorse plastiche della sezione. In ogni coppia N e M_x saranno rispettivamente minori di N_p e M_{xp} .
I casi limite saranno $(N_p, 0)$ e $(0, M_{xp})$.
Per sezione rettangolare:



Equilibrio alle trazione e alla compressione:

$$N = b \cdot (h-a) \cdot f_y - b a f_y = b(h-2a) f_y$$

$$M_x = b a \cdot f_y \left(\frac{h-a}{2} \right) + b(h-a) \frac{a}{2} f_y = b a f_y (h-a)$$

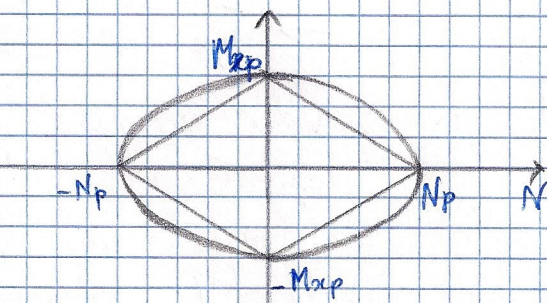
Dalla prima equazione risulta:

$$2 a b f_y = h b f_y - N \Rightarrow a = \frac{h}{2} - \frac{N}{2 b f_y}$$

Sostituiamo nell'equazione di equilibrio alla rotazione rispetto all'asse x :

$$M_x = b \left(\frac{h}{2} - \frac{N}{2 b f_y} \right) f_y \left(\frac{h}{2} + \frac{N}{2 b f_y} \right) = b f_y \frac{h^2}{4} - \frac{N^2}{4 b f_y}$$

Osserviamo ottenuto il dominio limite, di tipo parabolico. Di tipo b si approssima, a favore di sicurezza, con un d_2 minimo romboidale interno.



I casi limite sono $M_x = 0 \Rightarrow N = N_p = b h f_y$, $a = 0$ e $N = 0 \Rightarrow M_x = M_{xp} = \frac{b h^2}{4} f_y$, $a = h$. Le agiscono contemporaneamente N , M_x e T .
il dominio limite diviene bidimensionale

Resistenza e classificazione delle sezioni

Le sezioni di elementi metallici vengono classificate in funzione della loro capacità rotazionale $\mu_x = \frac{X_u}{X_y} - 1$, con X_u e X_y rispettivamente curvatura ultima e di snervamento. Esistono quattro classi, da quella delle sezioni più duttili (1) in campo post-elastico a quella delle sezioni soggette a instabilità locale (4). Tabelle permettono di determinare la classe della sezione in funzione delle sue proprietà geometriche e del parametro $\lambda = \sqrt{\frac{E}{f_y}}$, con f_y tensione di snervamento in N/mm^2 . Altre tabelle raccolgono tutte le sezioni e ne mostrano la classe in funzione del tipo di acciaio di cui sono fatte.

Qualifichiamo le resistenze a seconda del tipo di sollecitazione a cui sono sottoposte le sezioni:

- Resistenza a trazione, indipendente dalla classe:

$$N_u = \min \{ N_p, N_t \}, \quad N_p = A \cdot f_y, \quad N_t = \alpha \cdot A_m \cdot f_t$$

f_y e f_t rispettivamente di snervamento e di rottura, α coefficiente di rottura, di solito pari a 0,9.

Con sezione HEA 200, $f_y = 275 N/mm^2$ e $f_t = 430 N/mm^2$, senza forature:

$$N_p = A \cdot f_y = 5380 \cdot 275 = 1480 \text{ kN}$$

$$N_t = \alpha \cdot A_m \cdot f_t = 0,9 \cdot 5380 \cdot 430 = 2082 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow N_u = \min \{ N_p, N_t \} = 1480 \text{ kN}$$

- Resistenza a compressione, dipendente dalla classe:

1.) classi 1 e 2:

$$N_u = N_p = A \cdot f_y$$

2.) classe 3:

$$N_u = N_c = N_p = A \cdot f_y$$

3.) classe 4 (area efficace A_{ef} al posto di quella totale):

$$N_u = N_{p,eff} = A_{ef} \cdot f_y$$

Con sezione HEA 200, $f_y = 275 N/mm^2$:

$$\text{classe 1} \Rightarrow N_u = N_p = A \cdot f_y = 5380 \cdot 275 = 1480 \text{ kN}$$

- Resistenza a flessione retta, dipendente dalla classe:

1.) classi 1 e 2:

$$M_{u,r} = M_{p,r} = Z_x \cdot f_y$$

..) classe 3:

$$M_{max} = M_{acc} = W_x f_y$$

..) classe 4 (W_x variabile con $W_{x,eff}$ che esclude parti soggette a instabilità):

$$M_{max} = M_{acc,eff} = W_{x,eff} f_y$$

Con sezione IPE 300, $f_y = 355 \text{ N/mm}^2$:

classe 1 $\Rightarrow M_{max} = M_{x,p} = Z_x \cdot f_y = 2 \cdot S_x \cdot f_y = 223 \text{ kNm}$

- resistenza a taglio, indipendente dalla classe:

$$T_{y,u} = T_{y,p} = T_{y,e} = \frac{A_t \cdot f_y}{\sqrt{3}}$$

Con A_t area resistente a taglio (area dell'anima per le sezioni a doppio T).

Con IPE 300, $f_y = 355 \text{ N/mm}^2$:

$$A_t = A_{anima} = (h - 2s) t = (300 - 2 \cdot 10) \cdot 7,1 = 1978,1 \text{ mm}^2$$

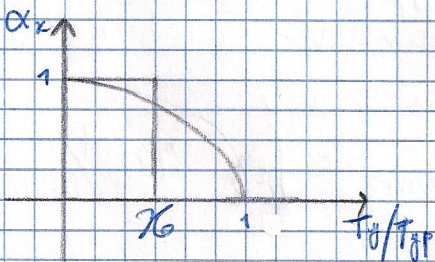
$$\Rightarrow T_{y,u} = T_{y,p} = \frac{A_t \cdot f_y}{\sqrt{3}} = 405 \text{ kN}$$

- resistenza a flessione e taglio, con sezioni di classe 1 e 2:

$$M_{x,u} = M_{x,p} = \alpha Z_x f_y$$

$$\alpha = f_d \left(\frac{T_{y,u}}{T_{y,p}} \right)$$

Graficamente:



$$\alpha = 1 \text{ per } \frac{T_{y,u}}{T_{y,p}} = \xi_0$$

$$\alpha = 0 \text{ per } \frac{T_{y,u}}{T_{y,p}} = 1$$

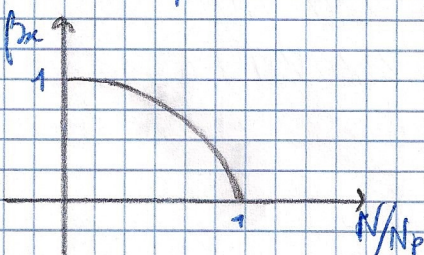
Generalmente $\xi_0 = 0,5$.

- resistenza a presso e tirso - flessione retta, con sezioni di classe 1 e 2:

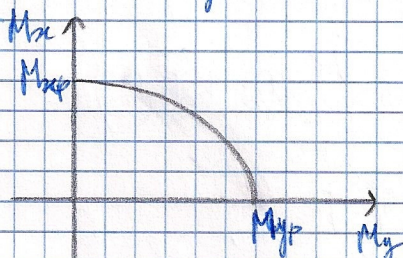
$$M_{x,u} = M_{x,p} = \beta_x Z_x f_y, \quad \beta_x = f_{ax} \left(\frac{N}{N_p} \right)$$

$$\beta_x = 1 \text{ per } N = 0$$

$$\beta_x = 0 \text{ per } \frac{N}{N_p} = 1$$



- resistenza a flessione devianta:



$$\left(\frac{M_x}{Z_x f_y} \right)^{\beta_x} + \left(\frac{M_y}{Z_y f_y} \right)^{\beta_y} = 1$$

Se si sceglie $\beta_x = \beta_y = 1$ si opera a favore di sicurezza.